

Jeux, Évolution et Réseaux Informatiques

Dans cet article, nous avons relevé l'ambitieux défi de tenter de vous montrer, en quelques pages, qu'il existe d'insoupçonnables points communs entre la théorie des jeux, l'évolution et le routage dans les réseaux informatiques.

- T. BRIHAYE
- M. HALLET
- B. QUOTIN

1. Quelques mots de Bertrand Russel

Dans [17], Bertrand Russell écrit : *“It must have required many ages to discover that a brace of pheasants and a couple of days were both instances of the number 2 : the degree of abstraction involved is far from easy.”* Dans le même ordre d'idées, Bertrand Russell aurait dit : *“Les mathématiques sont nées le jour où l'on s'est rendu compte qu'il y avait quelque chose de commun entre un couple de faisans et une paire de claques”* [5]. Derrière cette élégante boutade, il se trouve une idée intéressante : les mathématiques seraient une science qui permet d'extraire les points communs entre des objets dissemblables. Habités par cette évidence que sont les nombres, on oublie parfois de s'émerveiller des incroyables efforts d'abstraction qui ont été nécessaires à leurs créations.

Dans ce texte, nous utiliserons ces citations de Russell comme un fil conducteur. En effet, nous présenterons différents objets qui semblent fort différents, que ce soit d'un point de vue syntaxique ou sémantique, et nous montrerons qu'ils possèdent en fait d'intriguants points communs. Dans la Section 2, nous présenterons des éléments de la *théorie (dite classique) des jeux* à l'aide de petits exemples ludiques. Dans ce cadre, nous rencontrerons le concept d'*équilibre de Nash* qui cherche à prédire le comportement de joueurs, supposés *rationnels, intelligents* et *égoïstes*. Dans la Section 3, nous nous tournerons vers la *théorie des jeux évolutionnaires*. Ici, nous oublierons les joueurs *rationnels, intelligents* et *égoïstes*, pour nous tourner vers l'étude d'une grande population d'individus qui sont génétiquement programmés à agir d'une certaine façon. Nous ne chercherons plus à prédire le comportement de quelques individus, mais nous étudierons plutôt l'évolution d'une population composée d'individus de plusieurs espèces. En particu-

lier, nous nous intéresserons à différentes notions de *stabilité* de la population, vue comme un *système dynamique*. Nous terminerons cette section en montrant que de façon étonnante, il existe des liens forts entre les équilibres rationnels de la théorie classique des jeux, et les notions de stabilité de la théorie des jeux évolutionnaires. Dans la Section 4, nous ferons le grand écart en nous tournant vers un problème de réseaux informatiques. Nous rappellerons les principes de fonctionnement du réseau Internet en nous focalisant sur le problème du calcul distribué de chemins. En particulier, nous discuterons de la dynamique du protocole BGP responsable du routage dans Internet. La dernière section sera l'occasion de revenir sur les mots de Bertrand Russel qui ont ouvert cette introduction. En effet, nous mettrons en évidence différents points communs entre les précédentes sections de cet article. Tout d'abord, nous modéliserons le routage dans un réseau à l'aide d'un jeu sur graphe. Ensuite, nous verrons que la dynamique du protocole BGP peut être vue comme un processus évolutionnaire sur le graphe du jeu. Nous identifierons quel type de liens peuvent être faits entre deux jeux afin de préserver la stabilité des dynamiques correspondantes. Enfin, comme dans la Section 3, nous exhiberons des liens entre les équilibres statiques des jeux sur graphes et des notions de stabilité de la dynamique sur ces mêmes jeux.

2. Théorie des jeux

Dans cette section, nous ferons une brève introduction à la théorie des jeux. En quelques mots, on peut dire que la théorie des jeux est une branche des mathématiques qui s'intéresse aux interactions stratégiques entre différents agents rationnels (appelés joueurs). Ses fondements mathématiques remontent au début du 20^{ème} siècle [20, 2]. On retiendra ensuite les contributions majeures d'Oskar

Morgenstern et John von Neumann [13], ainsi que celles de John F. Nash [12]. Le lecteur intéressé par ce sujet pourra consulter [14].

2.1 – Un exemple pour commencer

Imaginez que l'on vous propose de gagner de l'argent en jouant avec un parfait inconnu. Le jeu est très simple : chacun des joueurs (vous et le parfait inconnu) a la possibilité de choisir entre deux lettres : la lettre *a* ou la lettre *b*. Ce choix devra se faire simultanément et sans aucune communication entre les joueurs. Les gains seront répartis selon les règles énoncées ci-dessous.

- Si les deux joueurs choisissent la lettre *a*, ils reçoivent tous les deux 40 Euros.
- Si les deux joueurs choisissent la lettre *b*, ils reçoivent tous les deux 20 Euros.
- Si les deux joueurs choisissent des lettres différentes, le joueur qui a choisi la lettre *a* reçoit 10 Euros, alors que celui qui a choisi la lettre *b* reçoit 60 Euros.

Sachant que vous n'avez le droit de jouer qu'une seule fois à ce jeu, quelle lettre allez-vous choisir ? Avant de tenter de répondre à cette question, nous allons présenter un modèle du jeu sur lequel il sera plus facile de raisonner.

Un modèle naturel pour ce jeu est donné par la matrice de la FIGURE 1. Dans cette matrice le premier joueur (disons vous) choisit sa lettre en choisissant une ligne, alors que le second joueur (le parfait inconnu) choisit sa lettre en choisissant une colonne. Chaque entrée de la matrice est un couple de réels qui correspond aux gains des joueurs quand ils jouent la ligne et la colonne correspondantes. Le gain du premier (resp. second) joueur se trouve sur la première (resp. seconde) composante du couple. En particulier, on observe sur la FIGURE 1 que si le premier joueur choisit la lettre *a* et que le second joueur choisit la lettre *b*, le premier joueur reçoit un gain de 10 Euros alors que le second joueur reçoit un gain de 60 Euros.

FIGURE 1 – Matrice associée au jeu introductif

Le premier joueur choisit une ligne, le second joueur choisit une colonne.

	a	b
a	(40, 40)	(10, 60)
b	(60, 10)	(20, 20)

Maintenant que le modèle est défini, revenons à

la question initiale : "Quelle lettre allez-vous choisir de jouer ?". Pendant quelques instants, nous allons nous placer dans la peau du premier joueur, et imaginer un raisonnement interne qu'il pourrait tenir afin de choisir la lettre qu'il va jouer.

- *Le choix qui me semble optimal est que nous jouions tous les deux la lettre a. J'imagine que mon adversaire va penser comme moi. On répartira alors tous les deux avec 40 Euros. Je vais donc jouer a.*
- *Mais, si mon adversaire choisit a, et que moi je choisis b, je peux gagner 60 Euros. C'est mieux que 40. Je vais plutôt jouer b.*
- *J'imagine que mon adversaire va arriver à la même conclusion, il est donc fort probable qu'il décide de jouer b. Sachant qu'il joue b, je préfère gagner 20 Euros que 10 Euros. Et donc jouer b aussi. En fait, quoi qu'il fasse, je préfère jouer b !*

En conclusion, il semblerait "raisonnable" pour chacun des joueurs de choisir la lettre *b*. Même si ce choix ne semble pas globalement optimal, c'est le seul équilibre prédit par la théorie des jeux. Intuitivement, un équilibre peut être vu comme un contrat qui jouit d'une certaine "robustesse". Cette robustesse se traduit par le fait qu'aucun des joueurs n'a d'intérêt individuel à dévier des termes du contrat, s'il est le seul à le faire. En théorie des jeux, les objets d'études sont d'avantage les situations d'équilibres que les situations globalement optimales. Dans la suite de ce texte, nous allons formaliser une notion de jeu et d'équilibre et expliciter les hypothèses qui conduisent à cette conclusion.

Le jeu que l'on vient de décrire est en fait une variante du célèbre *dilemme du prisonnier*, énoncé en 1950 par Albert W. Tucker à Princeton, qui est probablement l'un des exemples les plus étudiés de la théorie de jeux. Dans sa version originale, le dilemme du prisonnier s'énonce de la façon suivante. Deux hommes viennent d'être arrêtés par la police pour un crime qu'ils ont commis en complicité. Les deux hommes sont mis en détention dans des cellules séparées. Ils n'ont donc plus la possibilité de communiquer. Le policier chargé de l'interrogatoire des deux prisonniers offre à chacun l'opportunité de dénoncer l'autre sous les conditions suivantes.

- Si un seul des deux prisonniers dénonce l'autre, celui qui a dénoncé est remis en liberté alors que l'autre obtient la peine maximale (10 ans);
- si les deux prisonniers se dénoncent entre eux, ils sont condamnés à une peine plus légère (5

ans);

- si les deux prisonniers refusent de dénoncer l'autre, la peine sera minimale (1 an), faute d'éléments au dossier.

Le but étant ici de minimiser le nombre d'années de prison. Si on fait le parallèle avec le dialogue mental tenu par notre joueur dans le jeu initial, nous arriverons à la conclusion qu'il est préférable pour chacun des prisonniers de dénoncer l'autre. Encore une fois, il ne s'agit pas d'une situation globalement optimale, mais d'un équilibre. Des situations similaires à celle induite par le dilemme du prisonnier se retrouvent dans de nombreux domaines tels que l'économie, la politique, la biologie et la psychologie.

2.2 – Équilibre de Nash

Nous allons maintenant formaliser la notion de jeu sous forme stratégique qui nous permettra de définir le célèbre concept d'équilibre de Nash.

Définition 1 (Jeu sous forme stratégique). Un jeu sous forme stratégique à deux joueurs est la donnée de $\mathcal{G} = (A_1, A_2, g_1, g_2)$, où A_1 (resp. A_2) est l'ensemble des actions (parfois aussi appelées stratégies) du joueur 1 (resp. joueur 2); $g_1 : A_1 \times A_2 \rightarrow \mathbb{R}$ (resp. $g_2 : A_1 \times A_2 \rightarrow \mathbb{R}$) est la fonction de gain du joueur 1 (resp. joueur 2).

Étant donné un jeu sous forme stratégique $\mathcal{G} = (A_1, A_2, g_1, g_2)$, le déroulement du jeu est le suivant. Chaque joueur choisit, de façon indépendante, et sans communiquer avec l'autre joueur, une action dans son ensemble d'actions. Le premier (resp. second) joueur choisit une action a_1 (resp. a_2). Ensuite chaque joueur reçoit son gain, qui dépend des deux actions choisies : le premier joueur reçoit $g_1(a_1, a_2)$, alors que le second joueur reçoit $g_2(a_1, a_2)$. Le but de chacun des joueurs est de maximiser son gain.

Classiquement, la définition d'un jeu sous forme stratégique comporte n joueurs [14]. Dans cette section et la suivante, nous ne considérerons que les jeux à deux joueurs. Des jeux à n joueurs seront considérés dans la Section 5.

Nous pouvons désormais illustrer la Définition 1 à l'aide de l'exemple introductif.

Exemple 1. Dans l'exemple de la Figure 1, les ensembles d'actions des deux joueurs sont égaux : $A_1 = A_2 = \{a, b\}$. La fonction de gain du premier joueur est donnée par $g_1(a, a) = 40$, $g_1(a, b) = 10$, $g_1(b, a) = 60$, $g_1(b, b) = 20$. La fonction de gain du second joueur est donnée par $g_2(a, a) = 40$,

$g_2(a, b) = 60$, $g_2(b, a) = 10$, $g_2(b, b) = 20$.

On dit qu'un jeu $\mathcal{G} = (A_1, A_2, g_1, g_2)$ est fini quand A_1 et A_2 sont tous les deux des ensembles finis. Dans ce cas, la représentation matricielle (telle que celle de la Figure 1) reprend tous les éléments nécessaires à la description du jeu (tels que ceux donnés dans l'Exemple 1). Dans la suite de ce texte, on ne rencontrera que des jeux finis pour lesquels on se contentera donc de fournir la matrice naturellement associée.

Un des buts de la théorie des jeux est de prédire les comportements des joueurs qui participent à un jeu donné. Ces prédictions se font sous une série d'hypothèses que sont censés respecter tous les joueurs qui participent au jeu étudié. Une partie de ces hypothèses sont explicitées dans la Figure 2.

FIGURE 2 – Hypothèses sur les joueurs

Dans la théorie classique des jeux, on suppose toujours que chaque joueur est :

- **rationnel**, dans le sens où il cherche à maximiser son gain ;
- **égoïste**, dans le sens où il ne se préoccupe pas du gain de ses adversaires ; il ne cherche ni à les favoriser, ni à les défavoriser ;
- **intelligent**, dans le sens où il est capable d'analyser le jeu auquel il joue, quel que soit sa taille, et prédire les choix de ses adversaires, dont il est au courant qu'ils sont également rationnels, égoïstes et intelligents.

Au vu de ses hypothèses, il est clair que, bien que très puissante, la théorie des jeux n'est pas un cadre de travail universel qui permet de modéliser toutes les situations. Il est important d'être conscient des limites de la théorie des jeux induites par les hypothèses qui la définissent. L'utilisation systématique de la théorie des jeux à toute situation humaine est donc clairement à proscrire. Comme toute théorie mathématique, son applicabilité ne fait sens que si les hypothèses qui la définissent sont scrupuleusement respectées, tout en gardant à l'esprit que, même dans ce cas, il s'agit d'un modèle mathématique qui est, dans le meilleur des cas, une idéalisation de la réalité. L'applicabilité de la théorie des jeux à la réalité, et en particulier à la réalité économique, a donné naissance à l'économie expérimentale. Cette branche de l'économie a été récompensée en 2002 par le "prix Nobel" d'économie, décerné à Vernon Smith et Daniel Kahne-

man, pionniers dans l'application à la science économique des méthodes expérimentales utilisées en psychologie. Le lecteur intéressé par ces considérations pourra consulter [9, 8].

Dans la suite de cette section, nous considérons toujours que les hypothèses de la Figure 2 sont satisfaites. Nous allons désormais introduire la célèbre notion d'équilibre de Nash. Informellement, un équilibre de Nash est la donnée d'un **profil de stratégies**, i.e. une action pour chaque joueur, tel qu'aucun joueur ne regrette son choix (il n'aurait pas pu faire mieux) au vu du choix de l'autre joueur. C'est en ce sens qu'un équilibre de Nash est considéré comme une solution rationnelle à un jeu.

Définition 2 (Equilibre de Nash). Soit $\mathcal{G} = (A_1, A_2, g_1, g_2)$ un jeu sous forme stratégique. Soit (a_1, a_2) un profil de stratégie. On dit que (a_1, a_2) est un **équilibre de Nash** si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées.

1. $\forall b_1 \in A_1 \quad g_1(b_1, a_2) \leq g_1(a_1, a_2)$.
2. $\forall b_2 \in A_2 \quad g_2(a_1, b_2) \leq g_2(a_1, a_2)$.

Comme souvent en mathématique, il est aussi intéressant quand on rencontre un nouveau concept de comprendre sa négation. Un profil de stratégies (a_1, a_2) n'est pas un équilibre de Nash dès que l'un des deux joueurs possède une action qui lui permet de gagner strictement plus, au vu du choix de l'autre joueur. On dit alors que ce joueur possède une **déviaton profitable**. Afin d'illustrer les concepts d'équilibre de Nash et de déviaton profitable, nous allons revenir sur l'exemple introductif.

Exemple 2 (Retour au jeu introductif). On considère de nouveau la matrice de la Figure 1. On peut facilement se convaincre que le profil de stratégies (a, a) n'est pas un équilibre de Nash. En effet, le premier joueur possède une déviaton profitable, car s'il joue b (plutôt que a), alors que le second joueur ne modifie pas son action, il passera d'un gain de 40 Euros à un gain de 60 Euros. De la même façon, on voit que l'action b est également une déviaton profitable pour le second joueur. Soulignons que pour qu'un profil de stratégies ne soit pas un équilibre de Nash il suffit qu'un seul des joueurs possède une déviaton profitable. On peut montrer que le seul équilibre de Nash de ce jeu est en fait le profil de stratégies (b, b) .

Deux questions naturelles que se pose un mathématicien quand il découvre un nouveau concept sont : "Est-ce que ça existe toujours?" et "Quand

ça existe, est-ce que c'est unique?". Nous allons répondre par la négative à ces deux questions. Pour cela nous allons introduire deux jeux : le jeu du rendez-vous et le jeu du tir au but. Commençons par le jeu du rendez-vous qui nous permettra d'illustrer la non-unicité de l'équilibre de Nash.

Exemple 3 (Jeu du rendez-vous). A une époque où la téléphonie mobile n'était pas encore envahissante, Alice et Bob avaient décidé de passer la soirée ensemble. Tous les deux étaient bien au fait de l'heure de rendez-vous; malheureusement, ils avaient tous les deux oublié l'endroit du rendez-vous. Au vu de leurs habitudes, il ne pouvait s'agir que du Cinéma ou du Théâtre. Les deux amis préférèrent passer la soirée ensemble que seuls et n'ont pas de préférence pour l'activité réalisée. Cette situation est modélisée sur la matrice de la Figure 3.

FIGURE 3 – Rendez-vous

	C	T
C	(1, 1)	(0, 0)
T	(0, 0)	(1, 1)

On vérifiera facilement que ce jeu comporte exactement deux équilibres de Nash : (C, C) et (T, T) .

Nous allons maintenant passer au jeu du tir au but qui nous permettra d'illustrer qu'il existe des jeux sans équilibre de Nash.

Exemple 4 (Jeu du tir au but). Dans cet exemple, nous allons étudier les aspects stratégiques du tir au but. Que l'on apprécie ou non le football, il est indéniable que les tirs au but peuvent se révéler être d'une importance capitale lors d'une compétition internationale. Il n'est certainement pas nécessaire de rappeler aux supporters de l'équipe de France la victoire des Bleus aux tirs au but lors du quart de finale contre l'Italie de la coupe du monde 1998.

Dans cet exemple, nous allons modéliser un tir au but extrêmement simplifié dans lequel un tireur idéalisé affronte un gardien idéalisé. Le tireur n'a que deux choix : il peut tirer à Gauche ou à Droite. De la même façon, le gardien n'a que deux possibilités : plonger à Gauche ou à Droite. Pour simplifier les choses, quand on parle de Gauche et de Droite, on reste dans le référentiel du tireur, i.e. quand on dira que le tireur tire à Gauche et que la gardien plonge à Gauche, cela signifiera que le gardien a plongé du "bon côté"¹. Nous venons d'expliquer en quoi

1. ce qu'on appelle la Gauche du gardien est donc en fait sa propre Droite, vu que le gardien se trouve face au tireur.

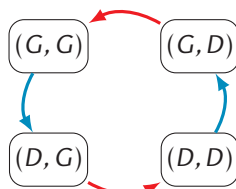
notre tir au but était simplifié, nous allons maintenant décrire en quoi les deux joueurs sont idéalisés. Tout d'abord, le tireur ne manque jamais la cible et si le gardien plonge à l'opposé de son tir, il marque toujours. En ce qui concerne le gardien, s'il plonge du bon côté, il arrête toujours le ballon avant que celui-ci ne franchisse la ligne. Cette situation idéalisée est représentée dans la matrice de la FIGURE 4, où le tireur est le premier joueur et le gardien le second joueur.

FIGURE 4 – Tir au but

	G	D
G	(0,1)	(1,0)
D	(1,0)	(0,1)

On se rend rapidement compte que quel que soit le profil de stratégies (a_1, a_2) , exactement un des deux joueurs possède une déviation profitable. Par exemple, dans la situation (G, G) , où le tireur a tiré à Gauche, le gardien a plongé à Gauche et donc arrêté la balle, c'est le tireur qui a une déviation profitable : tirer à Droite. Sur la FIGURE 5, on a représenté sous forme de graphe les déviations profitable des joueurs. Au vu de cela, on se rend rapidement compte que le jeu du tir au but ne possède pas d'équilibre de Nash.

FIGURE 5 – Tir au but – Déviations profitables



Les déviations profitables du gardien (resp. tireur) sont en rouge (resp. bleu).

2.3 – Jouer au hasard

La conclusion de l'exemple sur le tir au but (Exemple 4) a quelque chose de peu satisfaisant. Elle ne nous donne aucune indication concernant une manière rationnelle d'effectuer un tir au but. Imaginons une situation où vous allez être amené à jouer, en tant que tireur, un très grand nombre de fois (disons 10.000) le jeu du tir au but de la FIGURE 4. Quel serait, d'après vous, une stratégie pertinente ? Si on fait l'hypothèse que le gardien est intelligent, on se convainc facilement que tirer toujours du

même côté n'est pas une bonne idée. De même, jouer une séquence trop régulière du type Gauche, Droite, Gauche, Droite,..., bien que légèrement plus subtil, ne permettra pas de marquer beaucoup de buts. Il faudrait arriver à jouer de façon imprévisible. On pourrait lancer un dé (parfaitement équilibré) et tirer à Gauche chaque fois que l'on obtient 6 et tirer à Droite le reste du temps. Après quelques tirs, le gardien réalisera que s'il plonge tout le temps à Droite, il arrêtera la grande majorité de nos tirs. L'idéal serait plutôt de lancer une pièce (parfaitement équilibrée) et de tirer à Gauche chaque fois que l'on obtient face et de tirer à Droite quand on obtient pile. On peut montrer que cette façon de jouer (pour le tireur comme pour le gardien) correspond en fait à l'unique équilibre de Nash d'une version du jeu où l'on autorise les joueurs à utiliser du hasard pour jouer. Afin de formaliser cela, nous allons d'abord définir le concept de stratégie mixte. Pour ce faire, nous utiliserons la notation suivante. Etant donné un ensemble X , nous noterons $\Delta(X)$ l'ensemble des distributions de probabilités sur X .

Définition 3 (Stratégie mixte). Soit $\mathcal{G} = (A_1, A_2, g_1, g_2)$ un jeu sous forme stratégique. Une **stratégie mixte** du premier (resp. second) joueur est une distribution de probabilités sur A_1 (resp. A_2). On notera $\sigma_1 \in \Delta(A_1)$ (resp. $\sigma_2 \in \Delta(A_2)$) une stratégie mixte du premier (resp. second) joueur.

Quand les joueurs utilisent des stratégies mixtes, ils ne cherchent plus à maximiser leur gain, mais leur espérance de gain. Ce qui conduit naturellement à la définition d'équilibre de Nash en stratégies mixtes (que nous ne formaliserons que dans le cas où les ensembles d'actions sont finis). Soit $\mathcal{G} = (A_1, A_2, g_1, g_2)$ un jeu sous forme stratégique tel que A_1 et A_2 sont finis. Etant donné $(\sigma_1, \sigma_2) \in \Delta(A_1) \times \Delta(A_2)$ un profil de stratégies mixtes, on notera $\tilde{g}_i(\sigma_1, \sigma_2)$ le gain espéré du joueur i lorsque le premier (resp. second) joueur joue la stratégie σ_1 (resp. σ_2). Formellement, on a :

$$\tilde{g}_i(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2} \sigma_1(a_1) \cdot \sigma_2(a_2) \cdot g_i(a_1, a_2).$$

Dans la définition de gain espéré, il est important de noter les événements "le premier joueur joue l'action a_1 " et "le second joueur joue l'action a_2 " sont des événements indépendants. Cette hypothèse est cohérente avec le fait que les deux joueurs jouent de façon indépendante, et sans communiquer entre eux.

Dans la suite de ce texte, nous nous autoriserons les deux abus de notations suivants. Premiè-

rement, une stratégie $a_1 \in A_1$ peut clairement être vue comme une stratégie mixte : il suffit de l'assimiler à la distribution de Dirac, notée δ_{a_1} , qui associe une probabilité 1 à l'action a_1 et 0 à toutes les autres actions. Abusivement, nous écrirons parfois $\tilde{g}_i(a_1, \sigma_2)$ plutôt que $\tilde{g}_i(\delta_{a_1}, \sigma_2)$. De la même façon, nous nous autoriserons à écrire $\tilde{g}_i(\sigma_1, a_2)$. Deuxièmement, afin d'alléger les notations, au lieu de noter $\tilde{g}_i(\sigma_1, \sigma_2)$ l'espérance de gain induite par le profil de stratégies mixtes (σ_1, σ_2) , nous la noterons abusivement $g_i(\sigma_1, \sigma_2)$. C'est en tenant compte de ce second abus de notations que nous définissons la notion d'équilibre de Nash en stratégies mixtes.

Définition 4 (Equilibre de Nash en stratégies mixtes). Soit $(\sigma_1, \sigma_2) \in \Delta(A_1) \times \Delta(A_2)$ un profil de stratégies mixtes. On dit que (σ_1, σ_2) est un **équilibre de Nash en stratégies mixtes** si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées.

1. $\forall \tau_1 \in \Delta(A_1) \quad g_1(\tau_1, \sigma_2) \leq g_1(\sigma_1, \sigma_2)$.
2. $\forall \tau_2 \in \Delta(A_2) \quad g_2(\sigma_1, \tau_2) \leq g_2(\sigma_1, \sigma_2)$.

On peut désormais revenir sur l'exemple du tir au but.

Exemple 5 (Retour sur le tir au but). On considère à nouveau l'exemple du tir au but de la FIGURE 4. Syntaxiquement, le jeu \mathcal{G} reste le même, mais nous allons désormais envisager que les joueurs ont le droit de jouer "au hasard", en utilisant des stratégies mixtes. On considère la stratégie qui consiste à lancer une pièce (parfaitement équilibrée) et à tirer à Gauche chaque fois que l'on obtient face et de tirer à Droite quand on obtient pile. Formellement, cette stratégie est la distribution de probabilité qui associe $\frac{1}{2}$ à Gauche et à Droite. Si on note σ cette stratégie, on peut se convaincre que (σ, σ) est en fait le seul équilibre de Nash pour le tir au but.

Nous pouvons désormais énoncer le célèbre Théorème de Nash. Ce théorème affirme que tout jeu fini admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes. Ce théorème contribua au fait que John Forbes Nash obtint le "Prix Nobel" en économie en 1994, conjointement avec Reinhard Selten et John Harsanyi.

Théorème 1 (Théorème de Nash [12]). *Tout jeu sous forme stratégique fini admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes.*

Pour les curieux, précisons que la preuve du Théorème de Nash repose essentiellement sur le Théorème du point fixe de Kakutani.

3. Théorie des jeux évolutionnaires

La théorie des jeux évolutionnaires est souvent définie comme une application de la théorie des jeux à l'étude de l'évolution de populations. Bien que les deux théories partagent de nombreux objets (tel que les concepts de stratégie) et que la théorie des jeux évolutionnaires est clairement inspirée de la théorie (dite classique) des jeux; ces deux approches ont des différences fondamentales. Nous tenterons de souligner ces différences dans cette section. La théorie des jeux évolutionnaires a été introduite dans [11]. Le lecteur désireux d'en savoir plus sur ce sujet pourra consulter [19].

3.1 – Retour à l'exemple introductif

Nous allons revenir à la matrice de la FIGURE 1, mais en changeant complètement l'interprétation que nous allons donner à cet objet. Notre but est désormais d'étudier l'évolution d'une très grande population d'individus. Cette population est composée d'individus de deux espèces : les individus de type a et les individus de type b . On peut imaginer que chaque fois que deux individus se croisent ils "combattent" afin de s'approprier les ressources naturelles liées à la survie de leurs espèces respectives. Les individus n'opèrent pas de choix : un individu de type a se comporte toujours comme un individu de type a , sans réfléchir, et il en va de même pour un individu de type b . Quand un individu de type a rencontre un individu de type b , l'individu de type a reçoit un gain de 10, tandis que l'individu de type b reçoit un gain de 60. Ce gain est une mesure de la capacité de l'espèce à survivre et se reproduire. En théorie des jeux évolutionnaires, l'objet d'étude est l'évolution d'une population, plus précisément l'évolution des proportions des différentes espèces qui constituent une population initiale. L'évolution d'une population est modélisée, de façon déterministe, à l'aide d'un système d'équations différentielles. Ce système d'équations différentielles est lui même induit par la matrice qui décrit le jeu (telle que la matrice de la FIGURE 1 dans cet exemple introductif). Dans ce cadre, on peut par exemple se demander si une population composée exclusivement d'individus de type a peut survivre à une invasion (due par exemple à une mutation) d'une petite population d'individus de type b . Ces différentes idées vont être formalisées et discutées dans la suite de cette section.

3.2 – Dynamique de réplication

Comme mentionné auparavant, un des buts de la théorie des jeux évolutionnaires est d'étudier l'évolution d'une population composée de plusieurs espèces. Dans la suite de ce texte, nous supposons que la population étudiée est composée de n espèces distinctes. L'évolution de la population est décrite à l'aide d'un système d'équations différentielles, connu sous le nom de *dynamique de réplication*. Afin de formaliser cette dynamique de réplication, nous allons préalablement introduire quelques concepts.

On considère une très grande² population d'individus composée de n espèces. Les interactions entre les individus de différentes espèces vont être modélisées à l'aide d'un jeu sous forme stratégique, noté \mathcal{G} . Intuitivement, on peut imaginer que l'on tire au hasard un couple d'individus dans notre population, et que l'on fait "jouer" ce couple au jeu \mathcal{G} . On ne peut pas vraiment dire que les deux individus jouent, car ils ne choisissent pas d'actions, vu qu'ils sont génétiquement programmés à jouer l'action qui correspond à leur espèce. Donc à chaque espèce correspond une action du jeu \mathcal{G} et vice-versa. Toujours en se référant au jeu \mathcal{G} , chaque individu obtiendra un certain gain à l'issue de cette rencontre, gain qui modélise la capacité de l'espèce à survivre et se reproduire. On imagine qu'à chaque instant, de très nombreuses paires d'individus sont tirées au hasard, et que c'est de ces nombreuses interactions que résultera l'évolution de la population.

Au vu de la description intuitive que l'on vient de donner, on se rend compte que le jeu \mathcal{G} qui modélise les interactions entre individus ne peut pas être quelconque. En effet, les deux joueurs sont toujours des individus de la même population tirés au hasard, dont l'ensemble d'actions correspond aux différentes espèces qui constituent cette population. En particulier, les deux joueurs doivent toujours avoir le même ensemble d'actions. De plus, le fait qu'un individu soit considéré comme le premier ou comme le second joueur, n'aura aucune espèce d'importance pour décrire l'interaction entre les deux espèces qu'ils représentent. Pour ces raisons, nous allons nous focaliser sur les jeux sous forme stratégique (à deux joueurs) symétriques.

Définition 5 (Jeu symétrique). Soit $\mathcal{G} = (A_1, A_2, g_1, g_2)$ un jeu sous forme stratégique, on

dira que \mathcal{G} est **symétrique** si et seulement si $A_1 = A_2$ et pour tout profil de stratégies $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$, on a $g_1(a_1, a_2) = g_2(a_2, a_1)$. Dans ce cas, l'ensemble A_1 (égal à l'ensemble A_2) sera noté A et la fonction de gain g_1 (de laquelle on déduit facilement g_2) sera notée g .

Parmi les jeux que nous avons rencontrés jusqu'à présent, les jeux des Figures 1 et 3 sont symétriques; alors que le jeu de la Figure 4 n'est pas symétrique, bien que les deux joueurs aient le même ensemble d'actions.

Pour des motivations similaires à celles qui nous ont poussées à nous restreindre aux jeux symétriques, nous nous focaliserons également sur les équilibres de Nash symétriques.

Définition 6 (Equilibre de Nash symétrique). Soit \mathcal{G} un jeu sous forme stratégique symétrique. Soit $(\sigma_1, \sigma_2) \in \Delta(A) \times \Delta(A)$ un équilibre de Nash. On dit que (σ_1, σ_2) est un **équilibre de Nash symétrique** si et seulement si $\sigma_1 = \sigma_2$.

Dans les jeux des Figures 1 et 3, tous les équilibres de Nash sont symétriques. Nous rencontrons des équilibres de Nash non-symétriques dans la Section 3.3.

Nous avons maintenant toutes les notions nécessaires pour définir la dynamique de réplication, qui régit l'évolution des différentes espèces de la population étudiée. Avant d'établir formellement la dynamique de réplication, nous allons tenter d'en donner l'intuition.

Soit \mathcal{G} un jeu sous forme stratégique symétrique. On suppose que l'ensemble $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ contient n stratégies. Cela signifie également que notre population est constituée de n espèces différentes. De plus, quel que soit $1 \leq i \leq n$, on suppose que tous les individus de l'espèce i sont génétiquement programmés à toujours jouer l'action a_i . Les gains qui mesurent la capacité de chaque espèce à survivre et se reproduire sont donnés par la fonction g . On pourrait dire que ce gain permet de mesurer une valeur sélective ou une valeur adaptative. Afin de décrire la dynamique de réplication, nous allons introduire quelques variables.

Soit $1 \leq i \leq n$, on notera p_i le nombre d'individus de l'espèce i . Si on souhaite étudier l'évolution des espèces, il est naturel de considérer que le nombre d'individus de chaque espèce dépend du temps. On notera t la variable temporelle, et donc

2. On considère en fait que la population est infinie. Cela est dû au fait que l'on représente la proportion d'individus d'une espèce par un nombre réel de l'intervalle $[0, 1]$, et que l'on souhaite que n'importe quel réel de $[0, 1]$ représente une proportion de population. Cela n'a de sens que si la population est considérée infinie.

$p_i(t)$ le nombre d'individus de l'espèce i à l'instant t . On notera $p(t)$ le nombre total d'individus à l'instant t .

Intuitivement, la variation de $p_i(t)$ est obtenue en multipliant $p_i(t)$ par l'avantage de l'espèce i (à l'instant t). Toujours intuitivement, l'avantage de l'espèce i est obtenu en faisant la différence entre la valeur sélective de l'espèce i et la valeur sélective de la population moyenne. Afin de formaliser cela, nous allons définir l'état de la population à l'instant t , noté $\sigma(t)$. L'état de la population à l'instant t est la donnée d'un n -uplet constitué du nombre d'individus de chaque espèce à l'instant t , normalisé par le nombre total d'individus à l'instant t . Formellement, on a

$$\sigma(t) = (\sigma_1(t), \dots, \sigma_n(t)), \text{ où } \sigma_i(t) = \frac{p_i(t)}{p(t)}.$$

On remarque que, quel que soit t , $\sigma(t) \in \Delta(A)$ peut être vu comme une stratégie mixte de \mathcal{G} . Dans ce cadre, une stratégie mixte représente une proportion des différentes espèces d'individus (à un instant donné) et ne doit plus être interprétée comme un choix aléatoire effectué par un joueur. En particulier, la quantité $g(a_i, \sigma(t))$ représente la valeur sélective de l'espèce i , face à la population moyenne à l'instant t et la quantité $g(\sigma(t), \sigma(t))$ représente la valeur sélective de la population moyenne. Ci-dessous les équations de la dynamique de réplication, où $1 \leq i \leq n$ et $\dot{\sigma}_i(t)$ représente la dérivée de la fonction $\sigma_i(t)$ par rapport à la variable temps (t).

FIGURE 6 – Dynamique de réplication

$$\dot{\sigma}_i(t) = (g(a_i, \sigma(t)) - g(\sigma(t), \sigma(t))) \cdot \sigma_i(t).$$

On voit donc que la variation de la proportion d'individus de type i est directement liée à la différence entre la valeur sélective de la population de type i et la valeur sélective de la population moyenne; ainsi qu'à la proportion actuelle de la population de type i .

Etant donné une condition initiale $\sigma(0) \in \Delta(A)$, on peut montrer que le système d'équations différentielles de la FIGURE 6 admet toujours une solution unique. L'évolution des différentes espèces de population revient donc à étudier les solutions de la dynamique de réplication. On s'intéresse alors à l'étude de la stabilité du système. Nous allons formaliser quelques notions de stabilité qui nous seront utiles dans la suite.

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction suffisamment

dérivable. On considère l'équation différentielle ci-dessous.

$$\dot{x}(t) = f(x(t)). \quad (1)$$

Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution maximale de l'équation différentielle (1). Etant donné un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$, que l'on peut voir comme une condition initiale de (1), on dira que

- x_0 est un **point stationnaire** ssi

$$\varphi(x_0, t) = x_0, \text{ quel que soit } t \in \mathbb{R}.$$

- x_0 est **stable au sens de Lyapunov** ssi pour tout U , voisinage de x_0 , il existe V , voisinage de x_0 tel que

$$\forall x \in V \forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(x, t) \in U.$$

Intuitivement, si une trajectoire démarre d'un point proche de x_0 , elle restera proche de x_0 .

- x_0 est **asymptotiquement stable** ssi x_0 est stable au sens de Lyapunov et si il existe W , voisinage de x_0 tel que

$$\forall x \in W \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(x, t) = x_0.$$

Intuitivement, si une trajectoire démarre d'un point proche de x_0 , elle aura tendance à se rapprocher (à la limite) de x_0 .

Dans la section suivante, nous allons illustrer les concepts liés à la dynamique de réplication dans le cas simple des populations qui ne contiennent que deux espèces.

3.3 – Le cas deux espèces

Dans cette section, nous allons nous concentrer sur l'étude des jeux symétriques où l'ensemble A n'est constitué que de deux éléments. On peut montrer que tout jeu symétrique où $|A| = 2$ peut être transformé en un jeu $\mathcal{G}(p, q)$ comme illustré à la FIGURE 7 sans en changer les équilibres de Nash. Pour s'en convaincre, illustrons cette transformation sur le jeu de l'exemple introductif (FIGURE 1). Vu que le jeu est symétrique, nous n'expliquerons la transformation que pour la fonction de gain du premier joueur. Pour ce faire, on retranche 60 (resp. 10) des premières composantes de la première (resp. seconde) colonne de la matrice de la FIGURE 1. On obtient donc le jeu $\mathcal{G}(-20, 10)$, qui a exactement les mêmes équilibres de Nash que le jeu de départ.

FIGURE 7 – Deux actions

$\mathcal{G}(p, q) \rightsquigarrow$		a	b
	a	(p, p)	(0, 0)
	b	(0, 0)	(q, q)

Tout d'abord, on va étudier cette famille de jeu du point de vue de la théorie classique des jeux. On parle parfois de la version "statique" du jeu, que l'on oppose à la version "dynamique", étudiée en théorie des jeux évolutionnaires. En étudiant les équilibres de Nash des jeux $\mathcal{G}(p, q)$, on montre qu'il n'existe en fait que trois situations possibles, qui dépendent des signes³ de p et de q .

1. Si p et q sont de signes opposés, le jeu comportera un unique équilibre de Nash (a, a) (resp. (b, b)) si $p > 0$ et $q < 0$ (resp. si $p < 0$ et $q > 0$). Remarquons que le cas où $p < 0$ et $q > 0$ est équivalent à l'exemple introductif (voir FIGURE 1) dont le seul équilibre de Nash est (b, b) .
2. Si p et q sont de même signe, avec $p, q > 0$, le jeu comportera trois équilibres : (a, a) , (b, b) et (σ^*, σ^*) , où σ^* est la stratégie mixte qui associe la probabilité $\frac{q}{p+q}$ à l'action a .
3. Si p et q sont de même signe, avec $p, q < 0$, le jeu comportera aussi trois équilibres : (a, b) , (b, a) et (σ^*, σ^*) . Dans le cadre de la théorie des jeux évolutionnaires, pour les raisons exposées précédemment, on ne retiendra que l'équilibre de Nash symétrique (σ^*, σ^*) .

On va maintenant s'attaquer à la dynamique de réplication induite par les matrices de la FIGURE 7. Dans ce cadre, l'état de la population est donné par $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t))$ où $\sigma_1(t)$ représente la proportion de population de type a à l'instant t , alors que $\sigma_2(t)$ représente la proportion de population de type b , toujours à l'instant t . On a que $\sigma_1(t) + \sigma_2(t) = 1$, quel que soit $t \in \mathbb{R}$. La connaissance de $\sigma_1(t)$ en chaque instant est donc suffisante pour décrire l'évolution de la population. Vu que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a que $\sigma_1(t) \in [0, 1]$, on représentera l'ensemble des états de la population par l'intervalle $[0, 1]$. En appliquant la dynamique de réplication (voir FIGURE 6) au cas qui nous occupe, i.e. $\sigma_2(t) = 1 - \sigma_1(t)$, nous obtenons les équations (2).

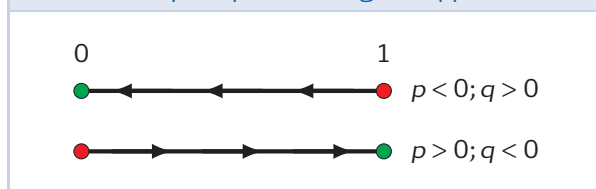
3. Les cas où p ou q sont nuls ne sont pas considérés dans la discussion.

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_1(t) = (p\sigma_1(t) - q\sigma_2(t)) \cdot \sigma_1(t) \cdot \sigma_2(t) \\ \dot{\sigma}_2(t) = -\dot{\sigma}_1(t) \end{cases} \quad (2)$$

On peut montrer que les points stationnaires du système d'équations différentielles de (2) dépendent des signes de p et q .

1. Si p et q sont de signes opposés, il y a exactement deux points stationnaires : 0 et 1. Le point stationnaire 0 correspond au cas où toute la population est de type b ; et donc à l'équilibre de Nash (b, b) . Symétriquement, le point stationnaire 1 correspond à l'équilibre de Nash (a, a) .
2. Si p et q sont de même signe, il y a trois points stationnaires : 0, 1 et $\frac{q}{p+q}$.

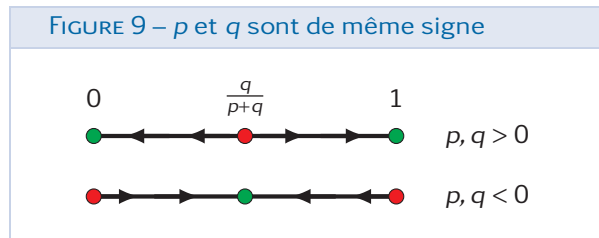
La similitude avec l'analyse des jeux $\mathcal{G}(p, q)$ au sens de la théorie classique des jeux est assez évidente. Nous allons désormais pousser un peu plus loin notre étude de l'évolution des populations. Dans le cas où p et q sont de signes opposés, la dynamique des solutions est décrite sur la FIGURE 8. Dans le cas où $p < 0$ et $q > 0$, en se référant au système d'équations différentielles (2), on peut facilement se convaincre que $\dot{\sigma}_1(t) \leq 0$, quel que soit $t \in \mathbb{R}$. Ce qui correspond à l'image du haut de la FIGURE 8, où l'état de population converge vers 0 (sauf si on démarre exactement en 1). Ce qui correspond à une évolution où le nombre d'individus de type a diminue, jusqu'à complètement disparaître. Cette situation est à mettre en parallèle avec l'unique équilibre de Nash (b, b) obtenu dans l'analyse du jeu statique, sous les mêmes conditions sur les signes de p et q . On remarque que le point 1 est également un point stationnaire, alors qu'il ne correspond pas à un équilibre de Nash. Il s'agit du cas extrême où la population n'est composée que d'individus de type a , dans ce cas, l'état de la population est constant : aucun individu de type b n'étant présent. Le cas où $p > 0$ et $q < 0$ est totalement symétrique et décrit sur l'image du bas de la FIGURE 8.

FIGURE 8 – p et q sont de signes opposés

Si p et q sont de même signe, on obtient deux situations très différentes. Dans le cas où $p, q > 0$ (image du haut de la FIGURE 9) on peut dire que $\frac{q}{p+q}$ est un point stationnaire *instable*. En effet si l'on démarre exactement en $\frac{q}{p+q}$, l'état de la population va rester constant. Cependant, si on démarre de n'importe quelle position (même arbitrairement proche de $\frac{q}{p+q}$), l'état de la population s'éloignera de $\frac{q}{p+q}$ pour converger vers 0 ou vers 1. Formellement, on a que $\frac{q}{p+q}$ est un point stationnaire qui n'est pas asymptotiquement stable.

Dans le cas où $p, q < 0$ (image du bas de la FIGURE 9) on remarque que $\frac{q}{p+q}$ est un point stationnaire *stable*. En effet si l'on démarre de n'importe quel état initial, différent de 0 et de 1, l'état de la population va converger vers $\frac{q}{p+q}$. Formellement, $\frac{q}{p+q}$ est asymptotiquement stable.

Sur les Figures 8 et 9, les points colorés en rouge sont stationnaires mais pas asymptotiquement stable, alors que les points colorés en vert sont asymptotiquement stables.



Si on considère la théorie classique des jeux, la simple analyse des équilibres de Nash ne permet pas de distinguer la nature stable de $\frac{q}{p+q}$, quand $p, q < 0$, de sa nature instable, quand $p, q > 0$. Cette nuance peut en fait être apportée grâce au concept de *stratégie évolutivement stable*.

Définition 7 (Stratégie évolutivement stable). Soit \mathcal{G} un jeu sous forme stratégique symétrique. Soit $\sigma \in \Delta(A)$. On dit que σ est une **stratégie évolutivement stable** si et seulement si elle satisfait les deux conditions suivantes.

- (σ, σ) est un équilibre de Nash.
- $\forall \sigma' (\neq \sigma) g(\sigma', \sigma) = g(\sigma, \sigma) \Rightarrow g(\sigma', \sigma') < g(\sigma, \sigma')$

Exemple 6 (Illustration du concept de stratégies évolutivement stable). Quand on regarde les deux jeux de la FIGURE 10, on peut facilement se convaincre que (a, a) , (b, b) et (c, c) sont des équilibres de Nash. Cependant, seules b et c sont des stratégies évolutivement stables.

FIGURE 10 – Stratégies évolutivement stables

	a	b		c	d
a	(1, 1)	(1, 1)	c	(1, 1)	(1, 1)
b	(1, 1)	(2, 2)	d	(1, 1)	(0, 0)

Retournons maintenant à la discussion concernant les jeux $\mathcal{G}(p, q)$ de la FIGURE 7 dans le cas où p et q sont de même signe.

- Quand $p, q > 0$, nous avons identifié trois équilibres de Nash : (p, p) , (q, q) et (σ^*, σ^*) . On peut montrer que p et q sont évolutivement stables alors que σ^* ne l'est pas. On peut par ailleurs constater que les points p et q sont (asymptotiquement) stables, alors que σ^* ne l'est pas.
- Quand $p, q < 0$, nous avons identifié un unique équilibre de Nash symétrique : (σ^*, σ^*) . On peut montrer que la stratégie σ^* est évolutivement stable. On peut par ailleurs constater que dans ce cas l'état σ^* est en fait (asymptotiquement) stable.

3.4 – Équilibre et stabilité

Dans la section précédente, dans un cadre restreint, nous avons constaté des similitudes entre l'analyse classique et l'analyse évolutionnaire d'un même jeu. Un autre jeu sur lequel il est très intéressant de se pencher pour observer ces similitudes est le jeu *Pierre-Papier-Ciseaux* (voir [19]). Ces similitudes ne sont pas le cas du hasard comme l'illustrent les théorèmes suivants.

Théorème 2. Soit \mathcal{G} un jeu sous forme stratégique symétrique. Soit $\sigma^* \in \Delta(A)$. Si σ^* est un point stable au sens de Lyapunov pour la dynamique de répliation induite par \mathcal{G} , alors (σ^*, σ^*) est un équilibre de Nash du jeu \mathcal{G} .

Théorème 3. Soit \mathcal{G} un jeu sous forme stratégique symétrique. Soit $\sigma^* \in \Delta(A)$. Si σ^* est une stratégie évolutivement stable dans le jeu \mathcal{G} , alors σ^* est un point asymptotiquement stable pour la dynamique de répliation induite par \mathcal{G} .

Il existe d'autres théorèmes de ce type liant la stabilité dynamique aux équilibres statiques (voir par exemple [19]).

3.5 – A propos des hypothèses

La théorie des jeux évolutionnaires est souvent définie comme une application de la théorie des jeux à l'étude de l'évolution de populations. Cette définition, bien que correcte, ne permet pas, selon nous, d'appréhender l'énorme différence conceptuelle qui sépare la théorie classique des jeux de la théorie des jeux évolutionnaires. Cette différence fondamentale réside dans les hypothèses qui sous-tendent les deux théories. Nous avons déjà évoqué l'importance des hypothèses de rationalité, d'égoïsme et d'intelligence des joueurs dans le cadre de la théorie classique des jeux (voir Table 2). Dans le cadre de la théorie des jeux évolutionnaires, on abandonne complètement ces hypothèses. Les individus qui constituent les populations étudiées ne sont pas supposés rationnels, ni égoïstes, ni intelligents. Ils sont juste "génétiquement programmés" à jouer d'une certaine façon, sans aucun aspect stratégique.

Au vu de ces différences conceptuelles, les résultats du type de ceux énoncés dans la Section 3.4 sont d'autant plus surprenants ; et font écho à la citation de Bertrand Russell du début de cet article.

4. Routage dans l'Internet

Dans cette Section, il ne sera pas question de faisans, encore moins de claques, mais bien de réseaux informatiques. Sur les pas de Russell, nous (re-)découvrons les principes du réseau Internet, du calcul des chemins qui le traversent, et de problèmes de non-convergence, en vue d'établir d'intéressants parallèles avec la théorie des jeux...

4.1 – Internet pour les nuls

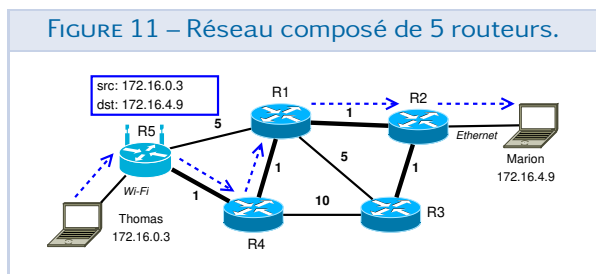
Si l'objectif du réseau Internet est une évidence pour la plupart d'entre nous aujourd'hui – acheminer des données d'un ordinateur à un autre – les détails de son fonctionnement sont souvent méconnus. Ainsi, le réseau Internet est constitué d'ordinateurs spécialisés, appelés *routeurs*, qui font suivre à nos données des chemins prédéterminés, successions de liens de natures et technologies variées telles qu'Ethernet, Wi-Fi ou DWDM. Afin de rendre interopérables les différentes technologies utilisées le long d'un chemin, un protocole de communication commun a été défini : l'*Internet Protocol* (IP). Il peut être vu comme une surcouche commune à

tous les équipements, cachant les détails propres à chaque technologie de communication.

Le protocole IP régit plusieurs aspects des communications au sein d'Internet. Il définit par exemple comment chaque ordinateur est identifié à l'aide d'une adresse IP. Un exemple d'une telle adresse, représentée en utilisant la notation *dotted-decimal*, est 192.168.1.17. Le protocole IP définit aussi que pour être transmises, les données doivent être regroupées en *paquets* de taille limitée, acheminés chacun indépendamment. Chaque paquet est préfixé par les adresses IP de la source et de la destination. L'adresse destination permet de déterminer vers où le paquet doit être acheminé tandis que l'adresse source permet au destinataire de répondre en créant un paquet dans lequel les adresses source et destination sont interverties.

Afin d'acheminer un paquet le long d'un chemin, le protocole IP fonctionne « *de proche en proche* », ce qui signifie que chaque routeur impliqué dans l'acheminement d'un paquet se limite à diriger celui-ci vers le routeur suivant sur base de l'adresse destination qu'il contient. Le paquet est ainsi progressivement rapproché de sa destination. Pour supporter ce processus d'acheminement, les routeurs disposent chacun d'une correspondance entre adresses destinations et routeurs suivants. Cette correspondance peut être fournie manuellement aux routeurs par les opérateurs de réseaux. On parle dans ce cas de *routage statique*. Cette approche est malheureusement peu pratique étant donnée la taille des réseaux – les routeurs et destinations peuvent en effet se compter par milliers – et les changements fréquents qui peuvent survenir dans le réseau, chacun nécessitant l'adaptation des correspondances destination/routeur suivant dans un certain nombre de routeurs.

Exemple 7. La Figure 11 illustre ces concepts. Thomas envoie un paquet IP vers Marion en lui assignant les adresses 172.16.0.3 et 172.16.4.9 respectivement comme source et destination. Le paquet est acheminé le long du chemin R5,R4,R1,R2 grâce au contenu des tables d'acheminement.



4.2 – Routage dynamique

Une approche plus pratique que le routage statique consiste à laisser les routeurs déterminer eux-même dynamiquement et de manière distribuée le chemin menant à chaque destination et à en dériver le routeur suivant correspondant. On parle alors de *routage dynamique* [1].

Une approche possible est le *routage à états de liens*. Il consiste pour chaque routeur à d’abord découvrir la *topologie* du réseau et ensuite calculer indépendamment les chemins les plus courts ou de moindre coût vers tous les autres routeurs. La topologie du réseau est modélisée par le graphe dirigé pondéré $G = (V, E)$ dans lequel V représente l’ensemble des routeurs et $E \subseteq V \times V$ l’ensemble des liens entre ces derniers. La fonction $c(u, v) > 0$ donne le coût des arcs fixés par l’opérateur du réseau en fonction de la latence, du débit ou de la charge du lien. Un chemin est une suite $u_1 u_2 \dots u_n$ où $n > 1$ et $(u_i, u_{i+1}) \in E, \forall i \in \{1, \dots, n-1\}$. Le coût d’un chemin $u_1 u_2 \dots u_n$ est alors défini comme la somme des coûts des arcs qui le composent, i.e. $\sum_{i=1}^{n-1} c(u_i, u_{i+1})$. Le réseau de la Figure 11, peut être modélisé par un tel graphe. Chaque lien y est étiqueté avec un coût identique dans les deux directions. Le coût du lien (R4,R3) vaut 10 tandis que le chemin de plus faible coût menant de R4 à R3 est R4,R1,R2,R3, de coût égal à 3.

Afin d’apprendre le graphe G du réseau, un *protocole d’inondation* est utilisé qui consiste pour chaque routeur à annoncer à l’ensemble de ses voisins un *paquet d’état de liens* constitué de la liste de ses voisins et du coût menant à chacun d’eux. Par exemple, dans le réseau de la Figure 11, le routeur R4 annoncerait le paquet d’état de liens $\{(R5, 1), (R1, 1), (R3, 10)\}$. Cette information est répétée de routeur en routeur de sorte que chacun d’entre eux puisse reconstituer le graphe complet du réseau. Une fois le graphe du réseau connu d’un routeur u , il applique un algorithme tel que l’algorithme de Dijkstra [6] pour calculer les plus courts chemins vers tous les autres routeurs. Le *routeur suivant* à utiliser pour joindre une destination est le successeur de u le long du plus court chemin ainsi calculé.

4.3 – Routage interdomaine et politiques

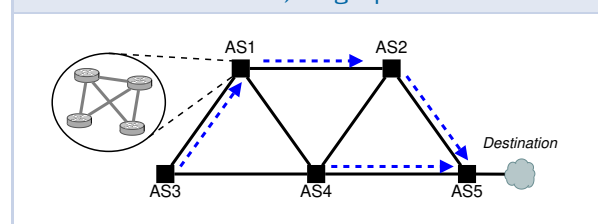
Plusieurs complications viennent s’ajouter lorsque l’on considère le routage à l’échelle d’Internet. Premièrement, Internet n’est pas un réseau

unique, mais bien l’interconnexion d’une multitude de réseaux – plus de 65000 à l’heure d’écrire ces lignes – sous le contrôle d’entités administratives différentes, dénommées *domaines* ou *Systèmes Autonomes* (AS). Il s’agit de fournisseurs d’accès à Internet, d’entreprises, d’universités, etc. Il n’est pas souhaitable que chaque AS soit connecté directement à l’ensemble des autres AS. Par conséquent, il est généralement nécessaire de passer par un ou plusieurs AS intermédiaires pour joindre une destination.

Deuxièmement, tous les AS ne sont pas sur un pied d’égalité. La plupart d’entre eux paient un ou plusieurs autres AS pour pouvoir envoyer et recevoir des paquets vers et à partir de destinations distantes, au travers de leurs réseaux. Les AS ont donc intérêt à influencer le choix des chemins. Par exemple, il peut être intéressant de préférer une route plus longue, mais moins coûteuse qu’une autre route. Un AS pourrait aussi vouloir éviter une route car elle n’est pas viable économiquement ou parce qu’elle traverse un réseau concurrent et qu’il serait risqué d’y faire passer ses paquets de données.

Pour ces raisons, le routage dans l’Internet est organisé en deux niveaux. Au sein du réseau d’un AS, le routage *intradomaine* se charge de déterminer les routes vers les destinations internes à l’AS, en utilisant des techniques telles que décrites en Section 4.2. Par opposition, le routage *interdomaine* se charge de déterminer les routes vers les destinations extérieures aux AS. Le routage interdomaine est effectué sur le graphe des AS, abstrayant par conséquent les détails internes à chaque AS (voir Figure 12), ce qui lui permet de **passer à l’échelle** des centaines de milliers de destinations et millions de routeurs impliqués dans le calcul des routes.

FIGURE 12 – Internet, un graphe d’AS.



4.4 – Le Border Gateway Protocol (BGP)

Le routage interdomaine nécessite la collaboration des routeurs de l’ensemble des AS. Pour cela, un protocole de routage commun a été standardisé :

le *Border Gateway Protocol*⁴ (BGP) [15]. Ce protocole définit comment les routeurs s'annoncent la joignabilité de destinations et comment les routes pour joindre celles-ci sont sélectionnées.

Dans la suite de l'article, nous présentons une version très simplifiée de BGP. Nous considérons que chaque AS est composé d'un unique routeur et, sans perte de généralité, une seule destination, confondue avec l'AS auquel elle est attachée et désignée par v_{\perp} . Nous considérons donc un graphe $G = (V, E)$ où V est l'ensemble des AS et $E \subseteq V \times V$ est l'ensemble des liens entre AS.

BGP est un protocole dit à *vecteur de chemins* : pour annoncer la joignabilité de v_{\perp} à un voisin, un AS annonce son actuel meilleur chemin vers v_{\perp} . Les chemins ont un double rôle dans BGP : leur longueur peut servir de critère de sélection et leur contenu permet d'éviter des boucles de routage ; seuls les chemins simples, c'est-à-dire sans cycle, sont utilisables. Les chemins manipulés par BGP sont des séquences d'AS $\pi = v_1 v_2 \dots v_k$ de longueur $k \geq 1$ où $v_k = v_{\perp}$ et tels que $\forall i \in \{2, \dots, k\}, (v_{i-1}, v_i) \in E$. On note $|\pi|$ la longueur du chemin π . On note ϵ l'absence de chemin, un chemin non-simple ou un chemin non-permis par une politique de routage. Pour chaque $v \neq v_{\perp}$, posons R_v l'ensemble des chemins $\pi_{v,u}$ reçus par v de ses voisins u , et π_v le meilleur chemin parmi R_v .⁵

Pour calculer les routes menant vers une destination, BGP procède de la façon suivante. Initialement, seul l'AS v_{\perp} connaît la destination, donc pour chaque $v \neq v_{\perp}$, R_v est vide et par conséquent, $\pi_v = \epsilon$. v_{\perp} annonce le chemin v_{\perp} à ses voisins, qui sera donc ajouté à R_v . Lorsqu'un AS v reçoit un nouveau chemin $\pi_{v,u} = u \dots v_{\perp}$ d'un voisin u , il remplace dans R_v l'ancien chemin reçu de u par $v\pi_{v,u}$ de sorte à toujours garder le dernier chemin de chaque voisin. Il sélectionne ensuite son nouveau meilleur chemin π_v . S'il a été modifié, il l'annonce à ses voisins, et ainsi de suite. Dans le cas où $\pi_{v,u} = \epsilon$ (u n'a pas de chemin), s'il contient déjà v (ce qui causerait une boucle) ou si ce chemin n'est pas permis par la politique de routage de v , alors le chemin de u est retiré de R_v .

Lorsque le contenu de R_v a changé, la meilleure route π_v est re-calculée en ordonnant R_v à l'aide de la relation d'ordre lexicographique suivante : soient

deux chemins $\pi_1 = v v_1 \dots v_{\perp}$ et $\pi_2 = v u_1 \dots v_{\perp}$ de R_v , on a que $\pi_1 <_v \pi_2$ si et seulement si

$$\begin{aligned} & (\lambda_v(\pi_1) < \lambda_v(\pi_2)) \\ \vee & (\lambda_v(\pi_1) = \lambda_v(\pi_2) \wedge |\pi_1| < |\pi_2|) \\ \vee & (\lambda_v(\pi_1) = \lambda_v(\pi_2) \wedge |\pi_1| = |\pi_2| \wedge v_1 < u_1) \end{aligned}$$

où λ_v est une fonction qui associe une valeur scalaire à un chemin π , permettant à l'AS v d'exprimer sa préférence locale pour ce chemin. Deux chemins π_1 et π_2 sont donc d'abord comparés entre eux sur base de λ_v . S'ils ont une préférence locale égale, ils sont ensuite comparés sur base de leur longueur. Finalement, s'ils sont de même longueur, ils sont comparés sur base de l'identifiant du voisin ayant annoncé le chemin. Cette dernière règle assure qu'il n'y a jamais qu'une meilleure route. Cette façon de procéder permet de définir une relation d'ordre totale stricte sur R_v . Si R_v est non vide, alors π_v la meilleure route de v est celle qui est classée première par la relation $<_v$. Sinon, $\pi_v = \epsilon$.

A l'issue du calcul de sa meilleure route π_v et, si cette dernière a changé, v l'annonce à son tour à ses voisins.⁶ Ce processus se poursuit jusqu'à ce qu'aucun routeur ne change sa meilleure route. On dit alors que le protocole de routage a convergé.

Exemple 8. La Figure 12 illustre le sous-graphe qui pourrait résulter du calcul par BGP des routes menant à la destination annoncée par AS5. On peut observer par exemple que le chemin emprunté par AS4 est 4,5 alors que AS3 utilise 3,1,2,5. Ce dernier n'est pas un plus court chemin, ce qui pourrait être dû, par exemple, à une préférence accordée par AS3 aux chemins passant par AS1 ou parce que le chemin 3,4,5 n'est pas permis.

4.5 – Convergence de BGP

Le procédé mis en oeuvre par BGP pour construire les routes interdomaines peut ne jamais converger, soit car le système BGP n'admet aucune solution stable soit parce qu'une telle situation ne peut être atteinte, enfermant le protocole dans un comportement oscillatoire.

Pour illustrer ce phénomène, considérons le système BGP le plus simple susceptible de ne pas converger. Ce système, appelé DISAGREE, est

4. Le terme *border gateway* désigne les routeurs à la frontière entre AS.

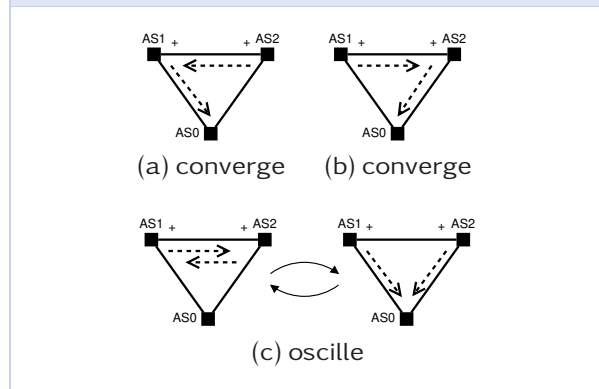
5. On distingue $\pi_{v,u}$ de π_u car u peut annoncer un chemin différent de sa meilleure route, p.ex. ϵ . De plus, π_u pourrait changer entre l'envoi de $\pi_{v,u}$ par u et sa réception par v .

6. En fonction de sa politique de routage, v peut choisir d'annoncer ϵ à certains voisins pour les empêcher d'établir une route à travers lui.

composé de 3 AS, tous connectés entre eux, qui cherchent à déterminer leur meilleure route vers AS0. AS1 (resp. AS2) préfère passer par AS2 (resp. AS1), ce qui se traduit par $\lambda_1(1,0) < \lambda_1(1,2,0)$ et $\lambda_2(2,0) < \lambda_2(2,1,0)$.

Le système DISAGREE est illustré à la Figure 13 ; les préférences locales de AS1 et AS2 étant dénotées dans la figure par des '+'. Ce système peut mener à trois situations différentes : convergence (Figures 13(a) et (b)) et oscillation (Figure 13(c)).

FIGURE 13 – DISAGREE : trois issues possibles.



Considérons d'abord les cas où le système converge vers une solution stable. Ces deux solutions étant symétriques, nous ne discutons que celle de la Figure 13 (a). Afin d'atteindre cette solution, nous prenons l'hypothèse supplémentaire que le temps de propagation des messages n'est pas égal sur tous les liens : il vaut une unité sur les liens (AS0,AS1) et (AS1,AS2) contre 10 unités pour (AS0,AS2). Le Tableau 1 donne la trace d'exécution du système. Chaque ligne résume le traitement d'un événement : initialisation du système ou réception d'un message annonçant une route. Pour chaque ligne, sont indiqués le temps d'occurrence de l'événement, l'AS u activé par celui-ci, l'ensemble R_u des chemins connus par cet AS suite à cet événement ainsi que le meilleur chemin p_u résultant (en gras) et finalement les annonces effectuées en réaction à cet événement, notées en utilisant la syntaxe *chemin* \rightarrow AS.

Au démarrage du système en $t = 0$, AS0 annonce la joignabilité de la destination à AS1 et AS2. Cette information parvient à AS1 au temps $t = 1$. Comme il s'agit de sa seule route, AS1 sélectionne le chemin 1,0 et l'annonce à AS2. Au temps $t = 2$, AS2 reçoit le chemin annoncé par AS1 et le sélectionne comme meilleure route. AS2 l'envoie à ses voisins. Au temps $t = 3$, AS1 reçoit le chemin d'AS2 mais le considère non faisable (car causerait un

cycle). Finalement, au temps $t = 10$, AS2 reçoit le chemin 2,0 mais ne change pas sa meilleure route car il préfère 2,1,0. Le système a convergé.

TABLEAU 1 – Convergence de DISAGREE.

t	u	R_u (π_u en gras)	Annonces
0	AS0		(0) \rightarrow AS1 (0) \rightarrow AS2
1	AS1	(1,0)	(1,0) \rightarrow AS2
2	AS2	(2,1,0)	(2,1,0) \rightarrow AS1
3	AS1	(1,0)	
10	AS2	(2,0),(2,1,0)	

Supposons à présent que les temps de propagation soient tous égaux à 1 unité. La trace correspondante est donnée dans le Tableau 2. Le démarrage du système est identique à la situation précédente : en $t = 0$, AS0 s'annonce à AS1 et AS2. Ceux-ci reçoivent cette annonce simultanément au temps $t = 1$, sélectionnent respectivement les chemins 1,0 et 2,0 et les annoncent à leurs voisins. Au temps $t = 2$, ils reçoivent simultanément ces annonces : AS1 sélectionne 1,2,0 car il le préfère à 1,0 et symétriquement AS2 sélectionne 2,1,0. Au temps $t = 3$, AS1 et AS2 reçoivent respectivement les chemins 2,1,0 et 1,2,0 qui sont non faisables. Ils ne disposent donc plus que de leur route directe, et la sélectionnent à nouveau. Il s'agit de la même situation qu'en $t = 1$. Le système oscille.

TABLEAU 2 – Oscillation de DISAGREE.

t	u	R_u	Annonces
0	AS0		(0) \rightarrow AS1 (0) \rightarrow AS2
1	AS1	(1,0)	(1,0) \rightarrow AS2
	AS2	(2,0)	(2,0) \rightarrow AS1
2	AS1	(1,0),(1,2,0)	(1,2,0) \rightarrow AS2
	AS2	(2,0),(2,1,0)	(2,1,0) \rightarrow AS1
3	AS1	(1,0)	(1,0) \rightarrow AS2
	AS2	(2,0)	(2,0) \rightarrow AS1
(...)			

La convergence du protocole BGP a fait l'objet de nombreuses études. Dans un article considéré comme fondateur, Griffin et al [7] ont exploré les conditions de convergence de BGP en employant un modèle simplifié : le *Stable Path Problem* (SPP). Ils y posent les questions suivantes : (1) une instance de SPP admet-elle au moins un état stable ; (2) la solution est-elle unique ; et (3) le système converge-t-il toujours vers un état stable. Ils donnent également une condition suffisante pour garantir la conver-

gence d'un système SPP : l'absence d'une sous-structure appelée **Dispute Wheel**, un « ensemble de dépendances circulaires entre les politiques de routage, qui ne peuvent être satisfaites simultanément ». Sami *et al.* [18] montreront plus tard que l'existence de multiples états stables est une condition suffisante pour empêcher la convergence d'un système SPP.

5. Le point commun entre un couple de faisan et une paire de claques

Comme Russel l'a suggéré, quand on crée des mathématiques, on cherche à faire des liens entre des notions qui sont à première vue différentes. Dans cet esprit, au sein de cette section, nous tenterons de répondre aux questions suivantes : Comment peut-on lier la théorie des jeux avec le routage dans les réseaux ? Peut-on définir certains types de liens entre les jeux afin de maintenir la convergence des dynamiques ? Y a-t-il toujours un lien entre les équilibres statiques et dynamiques ?

Dans les sections précédentes, nous avons tenté de résumer de multiples résultats de recherches établis par de nombreux chercheurs pendant plusieurs décennies. A contrario, le contenu de cette section s'inspire essentiellement d'un article récent auquel nous avons participé [4].

5.1 – Le routage internet, un jeu sur graphe

Nous allons premièrement montrer qu'on peut modéliser le routage Internet par un jeu sur graphe. On a vu que la topologie d'un réseau est constituée d'un graphe dirigé (V, E) où V est l'ensemble des AS et E les arêtes entre ces derniers. Le but des AS est d'amener leurs paquets vers un certain noeud destination, et leurs actions correspondent à leur choix du voisin par lequel ils veulent faire passer ce paquet.

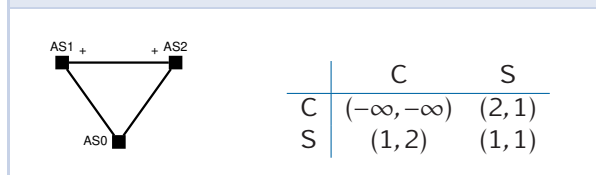
Un jeu stratégique

Une première idée pour modéliser ce routage en un jeu est de le voir comme un jeu sous forme stratégique. Pour rappel, un jeu sous forme stratégique à deux joueurs est la donnée de $\mathcal{G} = (A_1, A_2, g_1, g_2)$ où A_i est l'ensemble des actions du joueur i , et $g_i : A_1 \times A_2 \rightarrow \mathbb{R}$ sa fonction de gain. Dans le cadre qui nous intéresse, le jeu ne sera pas limité à deux

joueurs, on définira donc A_1, \dots, A_n et g_1, \dots, g_n les actions et les fonctions de gain des n joueurs.

Pour plus de simplicité, regardons ce qu'il se passe sur le système DISAGREE dont on a déjà parlé à la section précédente, et représenté à la FIGURE 14, à gauche. Parmi les trois AS, seuls AS1 et AS2 ont des actions : ils représenteront nos joueurs (respectivement joueur 1 et joueur 2), tandis que AS0 représente la cible. Les deux joueurs peuvent soit continuer (C) en envoyant leur paquet à l'autre joueur, ou stopper (S) en envoyant leur paquet à la cible. Comme vu à la Section 2, on peut représenter les fonctions de gain par une matrice comme à la droite de la FIGURE 14.

FIGURE 14 – Matrice associée à DISAGREE



Rappelons que le but des joueurs est d'atteindre la cible. Dès lors, le profil de stratégie (C, C) , qui correspond à ϵ dans le Tableau 2, a un gain de $-\infty$ pour chaque joueur car ils n'atteignent pas leur objectif. De plus, on avait vu que les deux AS préféreraient leur chemin indirect vers la cible. Cela est représenté dans la matrice de gain. Par exemple le profil de stratégie (C, S) , correspond à la situation représentée à la FIGURE 13 (b). On voit que dans ce cas le joueur 1 a son chemin préféré, auquel on donne donc un gain de 2, alors que le joueur 2 a un gain de 1, car il préfère le profil (S, C) représenté à la FIGURE 13 (a), qui donne un gain de 2 au joueur 2 et un gain de 1 au joueur 1.

On remarque que les deux équilibres des Nash du jeu sont (C, S) et (S, C) , qui correspondent aux deux solutions stables obtenues à la FIGURE 13.

Un jeu sur graphe

Cependant, cette manière de définir le jeu s'éloigne de la vision du réseau, qui peut être assimilé à un graphe. Modélisons le routage par un jeu sur graphe en nous basant sur le jeu sous forme stratégique que l'on vient de définir. Soit (V, E) un graphe dirigé tel que $V = \{v_1, \dots, v_n, v_\perp\}$. Alors v_\perp représentera la cible et v_i le noeud du joueur i . Pour plus de simplicité, on note $\bar{V} = V \setminus \{v_\perp\}$.

Les actions d'un joueur correspondent au choix du voisin à qui il veut envoyer son paquet. Pour un joueur i et un profil de stratégies $s = (a_1, \dots, a_n)$,

on peut construire un unique chemin $\pi(i, s)$ de manière récursive : $\pi(i, s) = v_i \pi(s(i), s)$, autrement dit, une route qui démarre en v_i et suit le profil de stratégies s . Pour notre exemple DISAGREE, de la FIGURE 14, si $s = (C, S)$, on a $\pi(1, s) = v_1 v_2 v_\perp$ tandis que $\pi(2, s) = v_2 v_\perp$.

Notons Π_v l'ensemble de tous les chemins simples de v à v_\perp et $\bar{\Pi}_v$ l'ensemble des chemins commençant en v et menant à une boucle. Pour tout s et v noeud du joueur i , $\pi(i, s) \in \Pi_v \cup \bar{\Pi}_v$. On définira donc la fonction de gain g_{v_i} du joueur i non plus directement sur le profil de stratégies, mais sur le chemin qui en découle. On aura donc pour chaque $v \in \bar{V}$, $g_v : \Pi_v \cup \bar{\Pi}_v \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. En particulier, pour $\pi \in \bar{\Pi}_v$, $g_v(\pi) = -\infty$. De plus, comme dit précédemment, un AS v peut filtrer une route π par exemple s'il ne la trouve pas économiquement viable ou si elle passe par un réseau concurrent. Ces routes auront dès lors également un gain de $-\infty$. Notons que la fonction g_v correspond exactement à la relation $<_v$ de la Section 4.4. En effet $g_v(\pi_1) < g_v(\pi_2) \Leftrightarrow \pi_1 <_v \pi_2$.

Un jeu \mathcal{G} sera donc la donnée de $(V, E, (g_v)_{v \in \bar{V}})$.

Revenons à l'exemple DISAGREE. On a donc $\mathcal{G}^{DIS} = (V, E, (g_v)_{v \in \bar{V}})$ tel que $V = \{v_1, v_2, v_\perp\}$ où v_1 représente AS1, v_2 représente AS2 et v_\perp représente AS0. $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_1), (v_1, v_\perp), (v_2, v_\perp)\}$ et g_v est la fonction de gain associée à la matrice de la FIGURE 14. Par exemple, $g_{v_1}(v_1 v_2 v_\perp) = g_1(C, S) = 2$ tandis que $g_{v_2}(v_2 v_\perp) = g_2(C, S) = g_2(S, S) = 1$.

5.2 – BGP, une dynamique d'évolution

Nous allons maintenant montrer que, en plus des liens *statiques* que nous venons d'explicitier entre le routage et la théorie des jeux, nous pouvons également lier les aspects dynamiques de ces deux domaines. Intéressons-nous de plus près à présent à BGP, et voyons comment on peut voir cette démarche comme une dynamique d'évolution.

Comme décrit à la Section 4.3, initialement, la destination commence par annoncer son chemin vers elle-même à ses voisins. Dès qu'un noeud reçoit l'annonce d'une route, il choisit sa meilleure route parmi celles disponibles puis l'annonce à son tour à ses voisins, et ainsi de suite. Lorsqu'une nouvelle route lui est annoncée, un AS peut reconsidérer sa route actuelle afin de choisir la meilleure des deux routes proposées, et ainsi envoyer à ses voisins sa nouvelle meilleure route. On dit que le protocole, ou dynamique, s'arrête lorsque plus aucun AS ne veut changer sa route choisie. Comme on

l'a vu précédemment, une question principale est de savoir si cette dynamique va s'arrêter ou non.

Comment adapter ce protocole au modèle théorique de théorie des jeux, et plus précisément cette idée de convergence? Au lieu de déterminer le ou les équilibres de Nash du jeu comme à la Section 2, pour n'importe quel profil de stratégie s , on va permettre aux joueurs de changer leur stratégie pour l'améliorer pour le round suivant, et ainsi de suite jusqu'à ce que plus aucun joueur ne souhaite changer sa stratégie.

Nous avons vu au Tableau 2 que plusieurs changements peuvent se faire en même temps. Lorsqu'un joueur change son choix, il tente de s'améliorer mais ce n'est pas toujours ce qui se passe. Par exemple, on voit qu'au temps 2, AS1 décide de prendre sa route vers AS2, et AS2 décide de prendre sa route vers AS1, ce qui les amène à un chemin qui n'atteint plus la cible.

Dans ce contexte, on modélisera cette possibilité de manière simplifiée par de la concurrence, c'est-à-dire le fait que plusieurs joueurs peuvent changer en même temps. On appelle dynamique de routage \rightarrow la dynamique qui respecte les conditions suivantes : Pour deux profils de stratégies s et s' , on aura $s \rightarrow s'$ si tous les joueurs qui changent leur stratégie de s à s' le font dans le but de s'améliorer.

Illustrons cette dynamique sur l'exemple DISAGREE de la FIGURE 14. Soit $s = (S, S)$, le profil de stratégie où les deux joueurs décident d'aller immédiatement vers la cible. Les deux joueurs se disent, au même moment, qu'il serait plus intéressant pour eux de changer de stratégie. En effet, sans savoir que l'autre change aussi, ils s'imaginent avoir un gain de 2 au lieu de 1. Hors, ce changement $s \rightarrow s'$ mène vers $s' = (C, C)$ qui leur apporte à tous les deux un gain de $-\infty$. Une autre possibilité de changement, toujours en commençant en $s = (S, S)$, est que uniquement le joueur 1 décide de changer sa stratégie. On aura alors $s \rightarrow s''$, avec $s'' = (C, S)$.

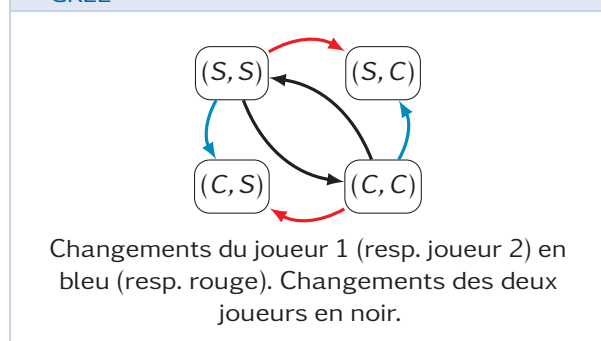
5.3 – Un graphe de dynamique

Afin d'avoir une vision globale de la dynamique d'un jeu sur graphe, nous allons représenter cette dynamique, elle aussi, par un graphe. Il sera important de distinguer ces deux graphes. Nous retrouverons, premièrement, le graphe du jeu, noté (V, E) avec V les noeuds qui représentent les AS, et E les arêtes qui représentent les liens entre deux AS. Deuxièmement, pour \mathbf{S} l'ensemble des profils de stratégie du jeu, nous introduisons le graphe de la

dynamique $(\mathbf{S}, \rightarrow)$, dont les noeuds représentent les profils de stratégies, et \rightarrow représente la dynamique de routage. Une arête (s, s') sera dans le graphe si $s \rightarrow s'$ comme vu précédemment.

Afin d'illustrer ce nouveau graphe de dynamiques, reprenons l'exemple DISAGREE à la FIGURE 14. Dans ce jeu, il y a quatre profils de stratégie : (S, S) , (S, C) , (C, S) et (C, C) . On a expliqué que l'on pouvait par exemple passer de (S, S) à (C, C) à l'aide de la dynamique de routage, ainsi que de (S, S) à (C, S) . Un raisonnement similaire peut être fait afin d'obtenir le graphe illustré à la FIGURE 15.

FIGURE 15 – Graphe de dynamique de DISAGREE



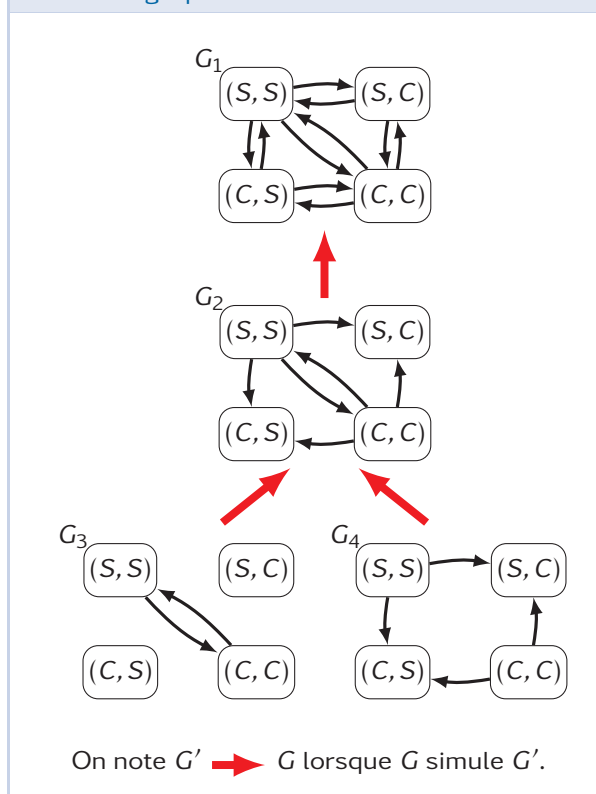
Dès lors, déterminer si la dynamique termine pour un certain jeu revient à déterminer si le graphe de dynamique est acyclique. On voit facilement que le graphe de dynamique de la Figure 15 n'est pas acyclique, ce qui implique que la dynamique de routage ne termine pas sur DISAGREE, ce qui avait été vu à la FIGURE 13.

5.4 – Simulation de graphe de dynamique

Il est naturel de se demander si deux jeux qui se "ressemblent" vont nécessairement avoir des comportements dynamiques "semblables". En d'autres termes, on se demande si leurs graphes de dynamiques respectifs sont "semblables". Ces idées peuvent être formalisées à l'aide du concept de *simulation*.

Intuitivement, on dira que le graphe (de dynamique) $G = (\mathbf{S}, \rightarrow)$ simule le graphe (de dynamique) $G' = (\mathbf{S}', \rightarrow')$ si tout ce qui peut être fait dans le graphe G' peut être fait dans le graphe G . On peut montrer que cette relation de simulation ainsi définie est un préordre (i.e. une relation binaire transitive et symétrique). Illustrons ce concept sur un exemple.

FIGURE 16 – Exemple de préordre de simulation sur graphe



On voit clairement qu'il s'agit d'une relation de préordre : G_2 simule à la fois G_3 et G_4 , mais ces deux derniers sont incomparables. De plus, comme G_1 simule G_2 , il simule également G_3 et G_4 .

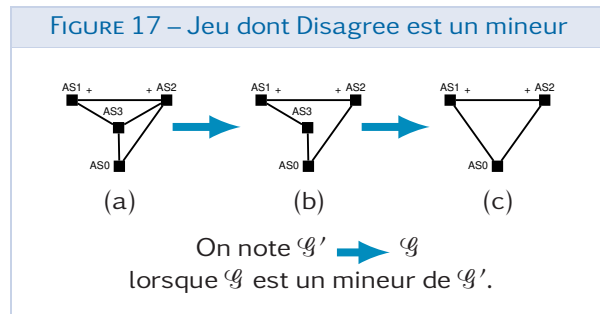
Sur l'exemple, on voit également que s'il y a un cycle dans un graphe G' , tous les graphes G qui le simulent auront également un cycle. Cette propriété est vraie en général. En effet, puisque ce graphe G doit être capable de faire *tout ce que* le graphe G' sait faire, en particulier il doit comporter un cycle. L'inverse n'est bien entendu pas vrai.

5.5 – Mineurs de jeux

A l'aide de la simulation, nous venons de définir une manière de comparer deux graphes (de dynamique). Afin d'opérer une comparaison similaire sur les jeux, nous allons introduire le concept de *mineur de jeux*. Cette notion est inspirée de la notion de mineur de graphes [10]. Pour ce faire, nous allons définir deux actions possibles à savoir supprimer une arête ou supprimer un noeud.

Regardons sur un exemple. Prenons le jeu de la FIGURE 17 (a). On voit que pour passer au jeu de la FIGURE 17 (b), on a enlevé l'arête (AS_2, AS_3)

puis, pour passer au jeu DISAGREE que l'on connaît (FIGURE 17 (c)), on a enlevé le noeud AS3 tout en prolongeant de la sorte les deux arêtes (AS1, AS3) et (AS3, AS0) en une unique arête (AS1, AS0).



Ces deux opérations (sous certaines conditions) sont les opérations autorisées dans la définition de mineur de jeu. On dira qu'un jeu \mathcal{G}' est un mineur d'un jeu \mathcal{G} s'il peut être obtenu par une succession de suppressions d'arêtes et de noeuds.

La notion de mineur est intéressante dans le cadre de la terminaison de dynamique, car nous avons le résultat suivant :

Théorème 4. Soit deux jeux \mathcal{G} et \mathcal{G}' dont les ensembles de profils de stratégies sont respectivement S et S' . Si \mathcal{G}' est un mineur de \mathcal{G} , alors (S, \rightarrow) simule (S', \rightarrow) . Et donc, si la dynamique termine

pour \mathcal{G} , alors elle termine pour \mathcal{G}' .

5.6 – Liens avec les équilibres

Nous avons vu, à la section 3.4, qu'il existait des liens très forts entre les notions d'équilibres au point de vue statique, et les notions de stabilité au point de vue évolutionnaire. Il en est de même dans le cas présent. Lorsqu'une dynamique termine, on peut voir les états terminaux comme une situation *stable* au point de vue dynamique. Et on remarque que ces états correspondent exactement aux équilibres de Nash.

Des résultats précis de ce type avec d'autres dynamiques peuvent être trouvés dans [16] [3].

6. Conclusion

Durant tout cet article, nous avons brassé de nombreux sujets concernant la théorie des jeux, la théorie des jeux évolutionnaires et les réseaux informatiques. Malgré les évidentes différences entre les objets rencontrés, nous espérons avoir fait émerger des similitudes entre eux, dans l'esprit de notre fil rouge : la citation de Russel qui liait mathématique, couple de faisans et paire de claques.

Références

- [1] D. BERTSEKAS et R. GALLAGER. *Data Networks (2nd Ed.)* Upper Saddle River, NJ, USA : Prentice-Hall, Inc., 1992. ISBN : 0-13-200916-1.
- [2] É. BOREL. « La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique ». *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* 173 (1921), p. 1304-1308.
- [3] T. BRIHAYE et al. « Dynamics and Coalitions in Sequential Games ». In : *Proceedings Eighth International Symposium on Games, Automata, Logics and Formal Verification, GandALF 2017, Roma, Italy, 20-22 September 2017*. Sous la dir. de P. BOUYER, A. ORLANDINI et P. S. PIETRO. Vol. 256. EPTCS. 2017, p. 136-150. DOI : 10.4204/EPTCS.256.10. URL : <https://doi.org/10.4204/EPTCS.256.10>.
- [4] T. BRIHAYE et al. « Dynamics on Games : Simulation-Based Techniques and Applications to Routing ». In : *39th IARCS Annual Conference on Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science (FSTTCS 2019)*. Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs), 35 :1-35 :14.
- [5] L. DE BRABANDERE et C. RIBESSE. *Petite Philosophie des mathématiques vagabondes*. Eyrolles, 2011. ISBN : 2212552408.
- [6] E. W. DIJKSTRA. « A note on two problems in connexion with graphs ». *Numerische mathematik* 1, n° 1 (1959), p. 269-271.
- [7] T. GRIFFIN, F. B. SHEPHERD et G. T. WILFONG. « The stable paths problem and interdomain routing ». *IEEE/ACM Trans. Netw.* 10, n° 2 (2002), p. 232-243. URL : <http://portal.acm.org/citation.cfm?id=508332>.
- [8] S. P. HARGREAVES-HEAP et Y. VAROUFAKIS. *Game Theory : A Critical Introduction*. Taylor & Francis, 2004. ISBN : 9780203489291.
- [9] D. KAHNEMAN et A. TVERSKY. « Prospect theory : An analysis of decisions under risk ». *Econometrica* (1979), p. 263-291.
- [10] L. LOVÁSZ. « Graph minor theory ». *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 43, n° 1 (2006), p. 75-86.
- [11] J. MAYNARD SMITH et G. R. PRICE. « The Logic of Animal Conflict ». *Nature* 246, n° 5427 (1973), p. 15-18. DOI : 10.1038/246015a0.
- [12] J. F. NASH Jr. « Equilibrium points in n -person games ». *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 36 (1950), p. 48-49. ISSN : 0027-8424.

- [13] J. von NEUMANN et O. MORGENSTERN. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1944, p. xviii+625.
- [14] M. J. OSBORNE et A. RUBINSTEIN. *A course in game theory*. MIT Press, Cambridge, MA, 1994, p. xvi+352. ISBN : 0-262-65040-1.
- [15] Y. REKHTER, T. LI et S. HARES. *A Border Gateway Protocol 4 (BGP-4)*. Internet Engineering Task Force (IETF), RFC 4271.
- [16] S. L. ROUX et A. PAULY. « A Semi-Potential for Finite and Infinite Sequential Games (Extended Abstract) ». In : *Proceedings of the Seventh International Symposium on Games, Automata, Logics and Formal Verification, GandALF 2016, Catania, Italy, 14-16 September 2016*. Sous la dir. de D. CANTONE et G. DELZANNO. Vol. 226. EPTCS. 2016, p. 242-256. DOI : 10.4204/EPTCS.226.17. URL : <https://doi.org/10.4204/EPTCS.226.17>.
- [17] B. RUSSELL. *Introduction to mathematical philosophy*. second. Dover Publications, Inc., New York, 1993, p. viii+208. ISBN : 0-486-27724-0.
- [18] R. SAMI, M. SCHAPIRA et A. ZOHAR. « Searching for Stability in Interdomain Routing ». In : *INFOCOM 2009. 28th IEEE International Conference on Computer Communications, Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies, 19-25 April 2009, Rio de Janeiro, Brazil*. 2009, p. 549-557. DOI : 10.1109/INFOCOM.2009.5061961. URL : <https://doi.org/10.1109/INFOCOM.2009.5061961>.
- [19] J. W. WEIBULL. *Evolutionary game theory*. With a foreword by Ken Binmore. MIT Press, Cambridge, MA, 1995, p. xxii+265. ISBN : 0-262-23181-6.
- [20] E. ZERMELO. « Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels ». *Proc. Fifth Congress Mathematicians* (1913), p. 501-504.

Thomas BRIHAYE

Département de Mathématique, Université de Mons
thomas.brihaye@umonts.ac.be

Marion HALLET

Département de Mathématique, Université de Mons
marion.hallet@umonts.ac.be

Bruno QUOTIN

Département d'Informatique, Université de Mons
bruno.quotin@umonts.ac.be

Les auteurs remercient Benjamin Monmege pour sa relecture attentive et ses commentaires judicieux.